Innotesting 2022, GUS-Workshop Vibration

Zur Proportionalität zwischen

mechanischer Spannung und Schwinggeschwindigkeit

Dr.-Ing. Werner Kuitzsch

INHALT Zur Proportionalität zwischen mechanischer Spannung und Schwinggeschwindigkeit

Bestimmung der mechanische Beanspruchung mit Hilfe der Schwingungsmessung.

Herleitungsüberblick: Schwinggeschwindigkeit v zur Materialspannung σ.

Anwendung der Proportionalität von σ und v bei der Materialschädigung:
- Schockschädigungsspektrum (SDS, Shock Damage Spectrum),
- Ermüdungsschädigungsspektrum (FDS, Fatique Damage Spectrum).

Herleitungsdetails:

Stab-Biegeschwingung, Bewegungsgleichung,
- Freie, transversale (ungedämpfte) Schwingung,
- Ergänzungen zur erzwungenen, gedämpften Schwingung.

Lösung für die freie, gedämpfte Schwingung,
- Trennungsansatz nach Orts- und Zeitfunktion,
  - Ortsfunktion,
    - Eigenwerte, Eigenkreisfrequenzen,
    - Eigenfunktionen, Eigenformen.
  - Zeitfunktion,
    - Abklingende Zeitfunktion, Eigenfrequenzen, gedämpft.

Modalanalyse und Eigenfunktionen.

Lösung für die erzwungene, transversale, gedämpfte Schwingung,
- Eigenform als fiktives SDOF-System, Amplitude, Übertragungsfunktion.

Messung der erzwungenen Schwingungen y, v.

Krümmung des Stabes und Spannung σ in der Randfaser.

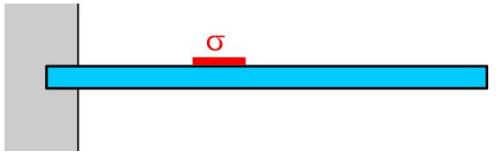
Proportionalität von σ und v mittels des Proportionalitätsfaktors K!

Bestimmung der mechanischen Beanspruchung σ mit Hilfe der Schwingungsmessung

Dehnungsmessung, direkt als **σ**,

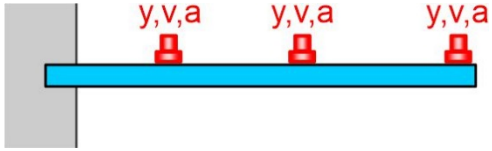
Vorteil: unmittelbare Aussage zur Dehnung ε → Spannung σ = ε·E.

Nachteil: Ort der maximalen Dehnung oft schwer zugänglich.



Schwingungsmessung, σ indirekt mittels Weg **y**, Geschwindigkeit **v,** Beschleunigung **a**,

Vorteil: Große Anzahl von Messpunkten einfacher applizierbar.
Höchste Beanspruchung im Resonanzfall:
„Messen da, wo es am stärksten schwingt“!



Nachteil: Beanspruchung σ ist abhängig von der Schwingwegamplitude y_0 und der Kreisfrequenz Ω bzw. proportional zu:

Weg	**Geschwindigkeit**	**Beschleunigung**
$\sigma \sim y = y_0$	$\sigma \sim v = y_0 \cdot \Omega$	$\sigma \sim a = y_0 \cdot \Omega^2$

Geschwindigkeit, Anwendungsbeispiele

→ ohne Spannungsbezug:
- Zulässige Schwinggeschwindigkeiten bei Gebäuden.
- Zulässige Schwinggeschwindigkeiten bei Turbinenlagern.

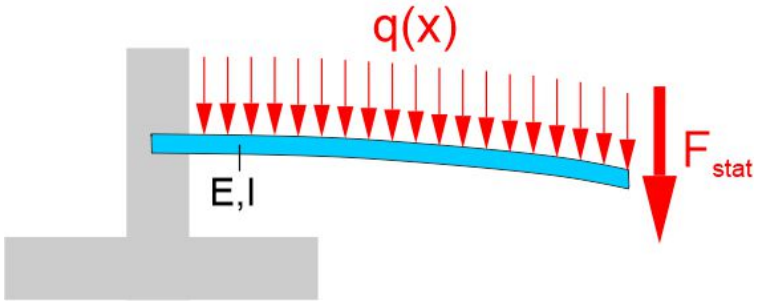
→ mit Spannungsbezug:
- Fliehkraftbeanspruchung der Turbinenschaufelwurzel

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2}\rho \cdot v_{max}^2$$

v_{max} Umfangsgeschwindigkeit der Schaufelspitze
ρ Materialdichte

Herleitungsüberblick, Schwinggeschwindigkeit v → mechanischer Spannung σ

Ausgehend vom Biegebalken unter statischer Querbelastung q(x)



F_{stat} Querkraft N

und/oder

q(x) Querbelastung (Streckenlast) N/m

Diff.gleichung d. Biegelinie unter statischer Querbelastung q(x)

$$y^{IV}(x) == \frac{q(x)}{E\,I}$$

E Elastizitätsmodul N/m²

I Flächenträgheitsmoment m⁴

↓

E·I Biegesteifigkeit

umgestellt

Statische, einseitige Biegung

$$E\,I \cdot y^{IV}(x) = q(x)$$

erfasst ist.

Herleitungsüberblick, Schwinggeschwindigkeit v → mechanischer Spannung σ

In der Diff.gleichung d. Biegelinie unter statischer Querbelastung q(x)

$$E\,I \cdot y^{IV}(x) = q(x)$$

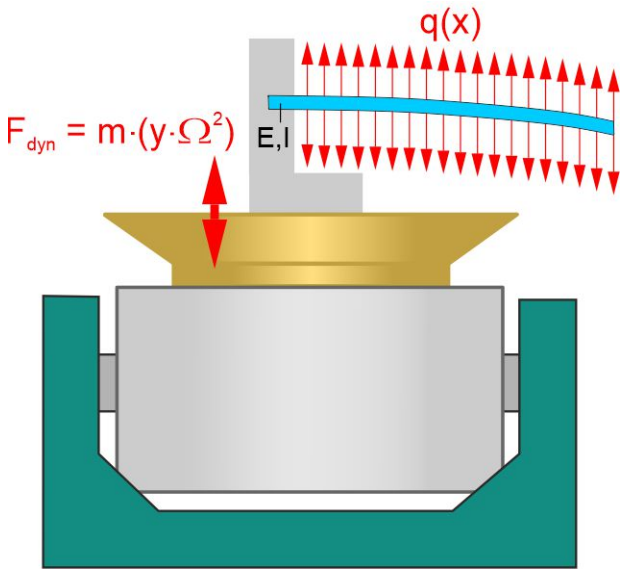
werden

beim Biegebalken unter Schwingungsanregung

die dynamischen Massenkräfte

$$F_{dyn} = m \cdot \left(y \cdot \Omega^2\right)$$

= Masse m · Beschleunigung ($y \cdot \Omega^2$)



werden als

dynamische Querbelastung q(x)

eingeführt

womit die

Dynamische, wechselseitige Biegung

$$E\,I \cdot y^{IV}(x) = -\mu \cdot \Omega^2 \cdot y(x)$$

μ Masse pro Längeneinheit

beschrieben ist.

Herleitungsüberblick, Schwinggeschwindigkeit v → mechanischer Spannung σ

Biegebalken unter dynamischer Querbelastung

$$E\,I \cdot y^{IV}(x) = -\mu \cdot \Omega^2 \cdot y(x)$$

Dazu kommen

Weitere Betrachtungen aus der **Modalanalyse** und der **Schwingungsmessung:**
Anhand der Strukturresonanzen bzw. -moden wird die maximale Materialspannung σ abgeschätzt,
ab Folien 12 bis 36.

Ergebnis:

Entgegen der ersten Vorstellung ist danach die **mechanische Spannung σ** in N/m²

→ **nicht abhängig vom Schwingweg y** in m ist, sondern

→ **proportional zur Schwinggeschwindigkeit v** in m/s:

$$\sigma = K \cdot \rho \cdot c \cdot v \quad \frac{N}{m^2} \quad (0.1)$$

bzw.

$$\sigma = \sqrt{E \cdot \rho} \cdot K \cdot v \quad \frac{N}{m^2} \quad (0.2)$$

K ist ein **Proportionalitätsfaktor** der mechanischen Spannung σ zur Schwinggeschwindigkeit v und enthält die **Profilkennwerte**.

Dazu kommen
E Elastizitätsmodul in N/m²
ρ Materialdichte in kg/m³

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ Schallgeschwindigkeit im Material in m/s

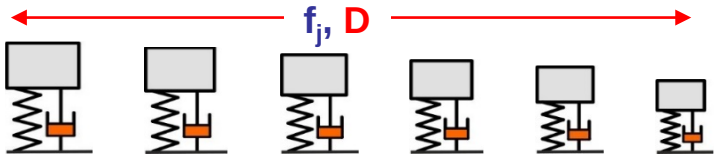
$\sqrt{E \cdot \rho}$ Wellenwiderstand in N·s/m³

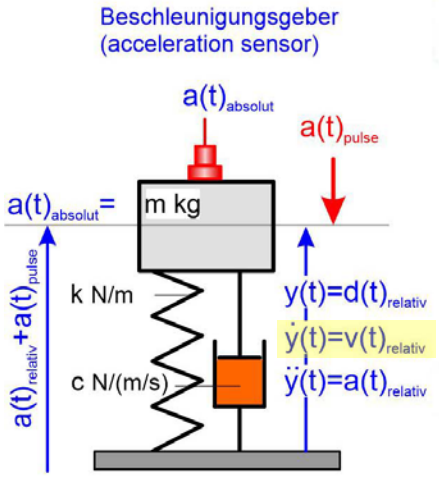
für (0.1) Gaberson: Shock Severity, GabSSE.
Gaberson: Conditions of Displacement, Velocity, or Acceleration for Diagnostic Monitoring, GabDVA:
Hierin werden unterschiedliche Herleitungen und Anwendungsfälle besprochen, jedoch – ohne Dämpfung und mit – periodischer Anregung.
Henderson & Piersol, Fatigue damage related descriptor, HenPieVel.

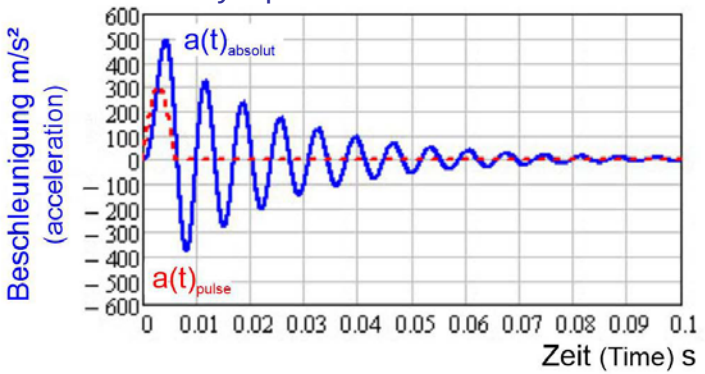
für (0.2) Gasch: Eignung der Schwingungsmessung zur Ermittlung der dynamischen Bauteilbeanspruchung, GasDynB:
klassische Balkentheorie für gedämpfte, erzwungene Schwingung mit allgemeiner Anregung; Basis dieses Vortrages.

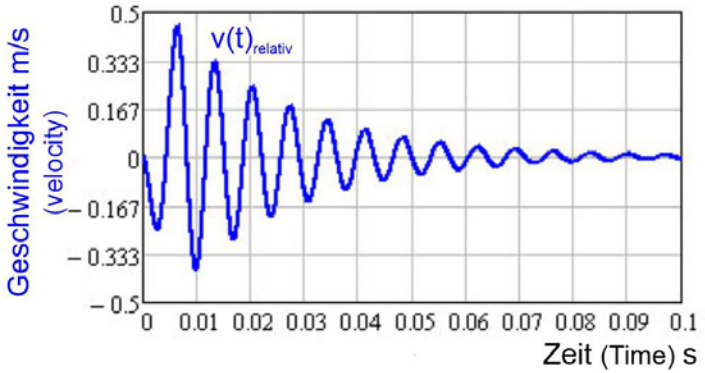
Anwendung σ ~ v, Schockschädigungsspektrum (Shock Damage Spectrum, SDS)

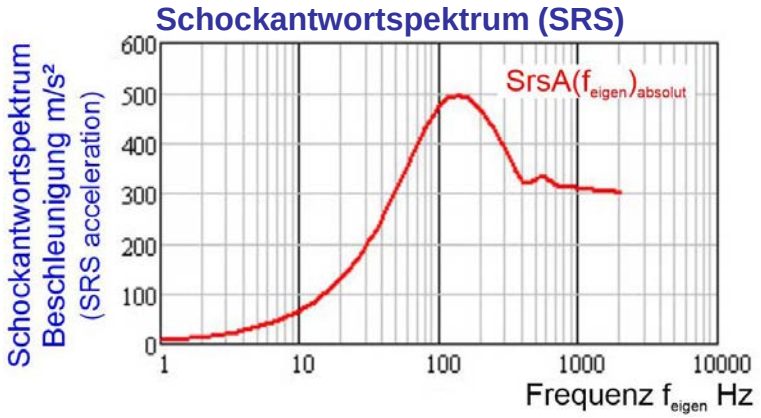
Shock Damage Spectrum (SDS) berechnet für **kurzzeitige**, **instationäre Anregungen** $a(t)_{pulse}$ (nur)
die maximalen Antwortamplituden der SDOF-Systeme unterschiedlicher Eigenfrequenzen $\omega_j = \sqrt{k/m}$, $f_j = \omega_j / 2\pi$.
jedoch gleicher Dämpfung $D = c/2m\omega$.
Dabei werden keine Lastwechselzahlen bestimmt!
Für die Schädigung wird
→ anstelle der mechanischen Spannung σ
→ die ihr proportionale relative Schwinggeschwindigkeit $v(t)_{relativ}$
betrachtet.
Das SDS wird auch als Pseudo-Velocity-Spectrum bezeichnet.

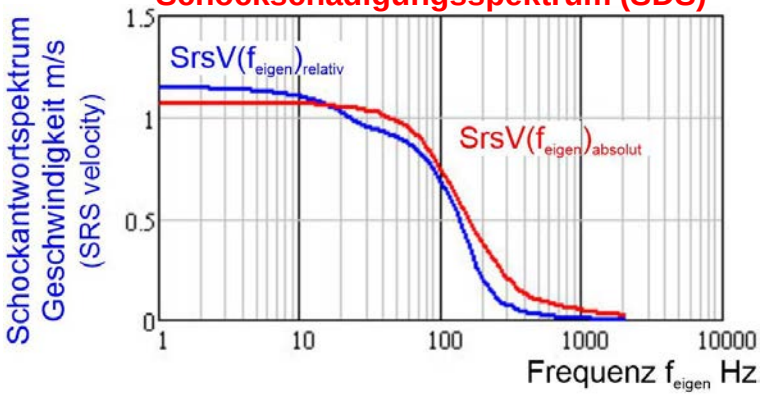












Schockantwortspektrum (SRS)

Schockschädigungsspektrum (SDS)

Anregungen: a_{pulse} = 300 m/s², T_{pulse} = 6 ms,
Antwort: f_{eigen} = 143.7 Hz (aus 43·Octave/6), D = 0.05; $a_{absolut,max}$ = 495 m/s², $v_{relativ,max}$ = 0.45 m/s.

Anwendung σ ~ v, Ermüdungsschadenspektrum (Fatique Damage Spectrum, FDS)

Fatigue Damage Spectrum (FDS) berechnet für **langzeitige, auch instationäre Anregungen** $a_{erregung}(t)$ (1):

(2) die Antwortzeitverläufe der SDOF-Systeme unterschiedlicher Eigenfrequenzen f_j jedoch gleicher Dämpfung D,

(3) formt sie auf Geschwindigkeitszeitverläufe $v_{pseudo}(t)$ um,

(4) zählt die Amplitudenhäufigkeit (Lastwechselzahlen) in Amplitudenklassen und dann:

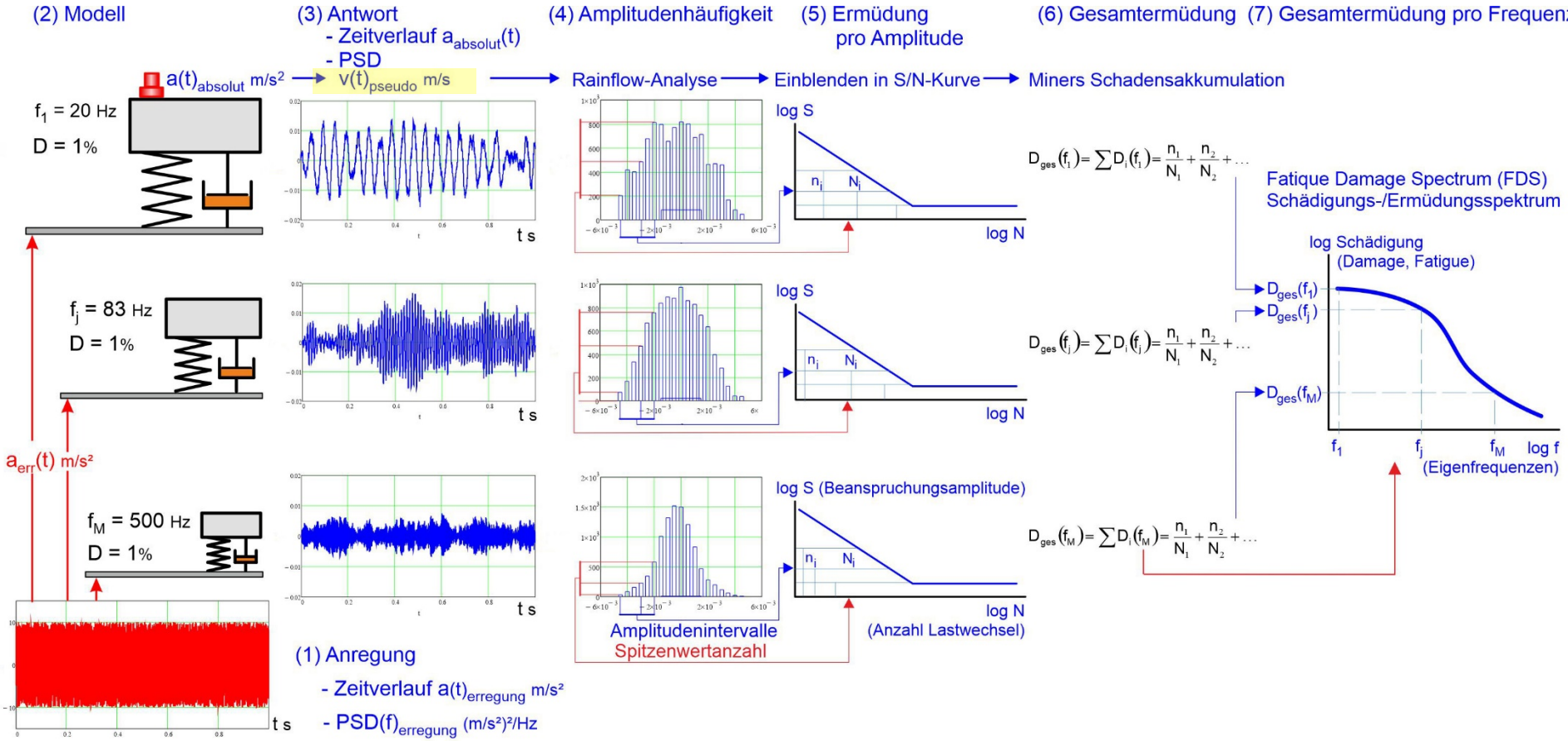
(5) Bezieht deren einzelnes Schädigungspotential aus dem Schädigungsdiagramm (S/N-Curve),

(6) Akkumuliert diese nach Miner zur Gesamtschädigung pro (Schwinger)-Eigenfrequenz,

(7) Trägt die Gesamtschädigung je Schwinger über ihren Eigenfrequenzen auf.

$$f_j, \omega_j = 2\pi f_j = 2\pi\sqrt{k/m}$$

$$D = c/2m\omega$$



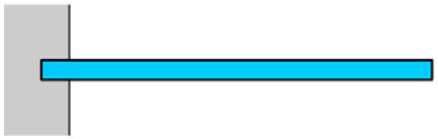
Bilder zur Vortragsfortsetzung, Übergang zur detaillierten Herleitung.

Modellbildung des Testobjekts

Modellbildung als Hilfe zur Interpretation des Verhaltens des Testobjekts unter Schwingungsbelastung

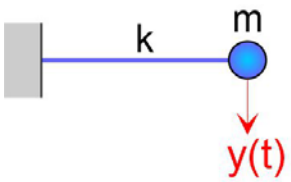
beispielsweise

einseitig eingespannter Stab (single sided fixed beam)

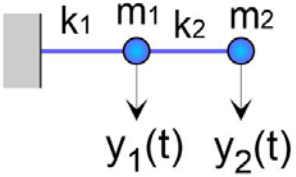


Kontinuum → ∞ DOF = Degree of Freedom = Bewegungsfreiheitsgrade

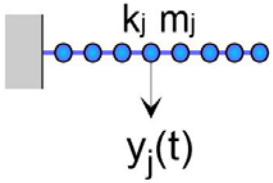
mechanische Modelle (mechanical models)



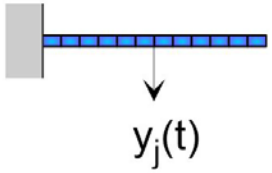
1 DOF
(SDOF)



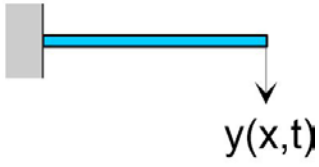
2 DOF
(MDOF)



n DOF
(MDOF)



n DOF
(Finite Elemente)



∞ DOF
(Kontinuum)

Mechanisches Modell zur Abschätzung des Schwingungsverhaltens:

Mit der Diskretisierung verändert sich das Modell!

→ Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade DOF gibt Anzahl der Eigenfunktionen (Eigenfrequenzen, Eigenformen).

→ Übergang von

→ den diskreten Systemen $y_j(t)$ mit den Freiheitsgraden j bis n,

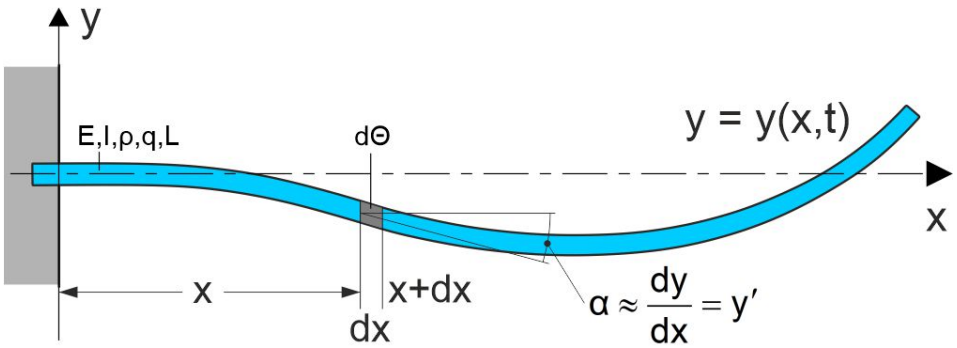
→ zum Kontinuum y(x,t) mit den Freiheitsgraden j bis n = ∞ und damit der Ortsfunktion y(x).

→ Mehr-Freiheitsgrad-Systeme haben ähnliche Schwingungszusammenhänge wie ein SDOF-System.

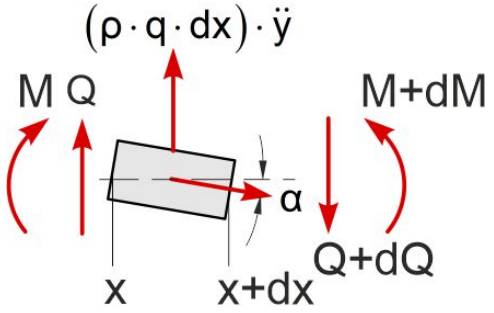
Stab-Biegeschwingung, Bewegungsgleichungen

Biegeschwingung ist die Verschiebung der Stabelemente in Querrichtung y und die Verdrehung α bzw. y′, dabei treten Querkräfte und Biegemomente auf.

Schwingender Stab



Freigeschnittenes Stabelement



Scherkräfte werden vernachlässigt.

Für das freigeschnittene Stabelement der Länge dx ergibt sich:

→ mit der Masse, ρ·q·dx, und der Summe der **äußeren Kräfte**, Q - (Q+dQ), die Bewegungsdiffgl. für die **Translation y(x,t)** aus dem

Schwerpunktsatz
(Newton)

$$(\rho \cdot q \cdot dx) \cdot \ddot{y} = -dQ \qquad (1)$$

→ mit dem Massenträgheitsmoment dΘ und der Summe der **äußeren Momente**, -M + (M+dM) + dx·Q - dx·(Q+dQ), die Bewegungsdiffgl. für die **Rotation α(x,t)** aus dem

Drallsatz

$$d\Theta \cdot \ddot{\alpha} = dM - dx \cdot Q \qquad (2)$$

Abkürzungen

y(x,t)	Schwingungsfunktion
Q(x,t)	Querkraft
M(x,t)	Biegemoment
E	Elastizitätsmodul
I	Flächenträgheitsmoment
ρ	Dichte
q	Querschnittsfläche
L	Stablänge
dΘ	Massenträgheitsmoment der Scheibe der Dicke dx

Stab, Bewegungsgleichung der freien, transversalen Schwingung

Vernachlässigung der Drehbewegung in (2), α(x,t) = 0

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} \qquad (3)$$

Ausgehend von der Differentialgleichung der
Verformungslinie des elastischen Balkens
(SzaEin: Szabo, Istvan. Einführung in die Technische Mechanik,14.9)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{M}{E\cdot I} \longrightarrow M = E\cdot I\cdot\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (4.1)$$

mit
- dem Schwerpunktsatz (1)

und
- der Proportionalität von Biegemoment M und Querkraft gemäß (3) in der Verformungslinie (4.1) ergibt sich die Ursprungsform der Bewegungsgleichung des transversal schwingenden Stabes (4.2):

$$(\rho\cdot q\cdot)\cdot\frac{\partial^2y}{\partial t^2} = -(E\cdot I)\cdot\frac{\partial^4y}{\partial x^4} \qquad (4.2)$$

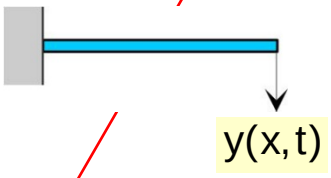
nochmals umgestellt, die bekannte
Bewegungsgleichung des transversal, frei schwingenden Stabes

$$\frac{\partial^2y}{\partial t^2} = -\frac{E\cdot I}{\rho\cdot q}\cdot\frac{\partial^4y}{\partial x^4} \qquad (5.1)$$

kurz

$$\ddot{y} = -\frac{E\cdot I}{\rho\cdot q}\cdot y^{IV} \qquad (5.2)$$

darin ist die Bewegung



(6)

eine Funktion von

und

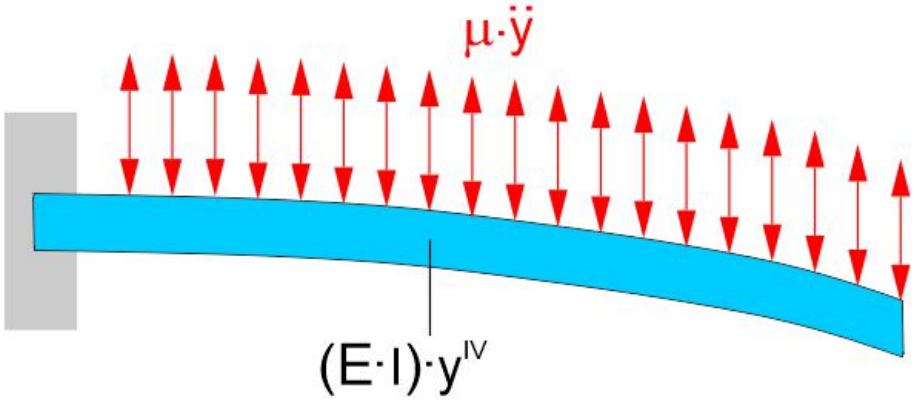
→ **Zeit t,** mit der partiellen Ableitung $\ddot{y} = \frac{\partial^2y}{\partial t^2}$ (6.1)

→ **Ort x,** mit der partiellen Ableitung $y^{IV} = \frac{\partial^4y}{\partial x^4}$ (6.2)

Stab, Bewegungsgleichung der freien, ungedämpften, transversalen Schwingung

Den Verformungsanteil y^{IV} in (5.2) auf die rechte Seite gebracht, ergibt die bekannte Schreibweise der Bewegungsgleichung des

frei schwingenden, ungedämpften Stabes



$$\mu \cdot \ddot{y} + (E \cdot I) \cdot y^{IV} = 0 \qquad (6.3)$$

Massenkraft Rückstellkraft

$\mu = \rho \cdot q$ Massebelegung (konstant)

$E \cdot I$ Biegesteifigkeit

Stab, Bewegungsgleichung, Ergänzung zur erzwungenen, transversalen Schwingung

mit dem Hinzufügen

- der Materialdämpfungskraft bei viskoelastischem Werkstoffverhalten bei **innerer Dämpfung D_i**,

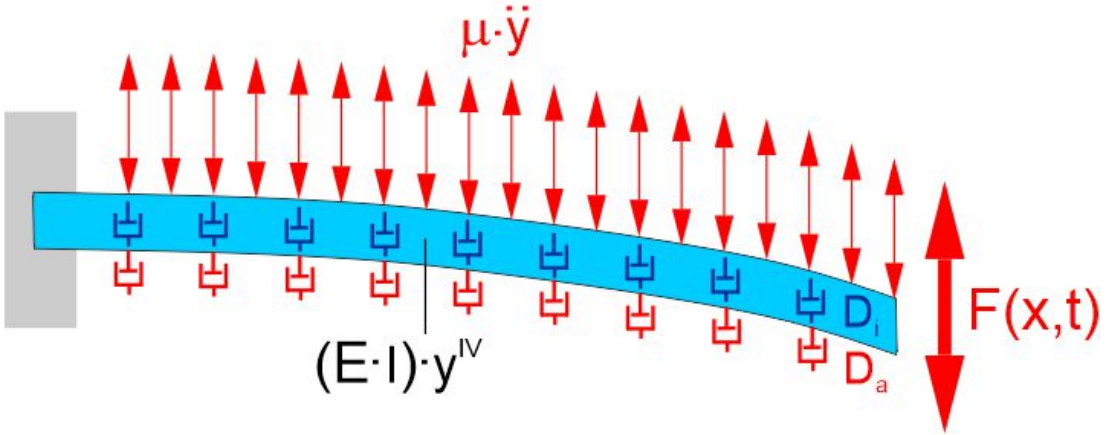
$$\sigma = E \cdot \left(\varepsilon + \dot{\varepsilon} \cdot D_i \right) \qquad (7.1)$$

- der äußeren Dämpfungskraft als geschwindigkeitsproportional mit der **äußeren Dämpfung D_a**,

$$D_a \cdot \dot{y} \qquad (7.2)$$

- der **Erregerkräfte F(x,t)**

in die Bewegungsgleichung des frei schwingenden, ungedämpften Stabes (6.3)



ergibt sich daraus die Bewegungsgleichung des
erzwungen schwingenden, gedämpften Stabes

$$\mu \cdot \ddot{y} + (E \cdot I) \cdot y^{IV} + (E \cdot I) \cdot D_i \cdot y^{IV} \dot{y} + D_a \cdot \dot{y} = F(x,t) \qquad (7.3)$$

Massenkraft	Rückstellkraft	Material-dämpfungskraft	Äußere Dämpfungskraft	Erregerkräfte

Stab, Lösung für freie, transversale, gedämpfte Schwingung

Bewegungsgleichung aus (7.3), ohne Zwangserregung: $F(x,t) = 0$

frei schwingender, gedämpfter Stab
mit y(x,t) als – Ortsfunktion y^{IV} und
– Zeitfunktion $\dot{y}$

$$\mu \cdot \ddot{y} + (E \cdot I) \cdot y^{IV} + (E \cdot I) \cdot D_i \cdot y^{IV} \dot{y} + D_a \cdot \dot{y} = 0 \qquad (7.4)$$

Lösung mittels Produkt- bzw. **Trennungsansatz** $y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ nach Bernoulli (8)

die partiellen Ableitungen (6.1, 6.2) von (8) nach Zeit und Ort in (7.4) eingesetzt und **sortiert nach Zeit- und Ortsabhängigkeit:**

linke Seite: allein eine **Funktion der Zeit t**	rechte Seite: allein eine **Funktion des Ortes x**

$$\frac{\ddot{T}(t) + \left(\frac{D_a}{\rho \cdot q}\right) \cdot \dot{T}(t)}{T(t) + D_i \cdot \dot{T}(t)} = -\frac{E \cdot I}{\mu} \cdot \frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = -\omega^2 \qquad (9)$$

K. Klotter: Damit diese Gleichheit zu beliebigen Zeiten t an allen Orten x besteht, müssen beide Seiten einer Konstanten gleich sein: hier **$-\omega^2$**.

K. Magnus: Form einer stehenden Welle, alle Punkte x unterliegen dem gleichen Zeitgesetz t.

Aus der Gleichheit der Quotienten von Zeit- und Ortsfunktion (9) ergeben sich zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

Differentialgleichung der Zeitfunktion T(t)

$$\ddot{T}(t) + \left(\frac{D_a}{\mu} + \omega^2 \cdot D_i\right) \cdot \dot{T}(t) + \omega^2 \cdot T(t) = 0 \qquad (10)$$

Differentialgleichung der Ortsfunktion X(x)

$$X^{IV}(x) - \omega^2 \left(\frac{\mu}{E \cdot I}\right) \cdot X(x) = 0 \qquad (11)$$

Bei der freien Schwingung wirken die Dämpfungen D_a, D_i nur in der Zeitfunktion T(t).

Stab, Lösung, Ortsfunktion, freie, transversale Schwingung

Schwingungsdifferentialgleichung der Ortsfunktion X(x) gemäß (11)

$$X^{IV}(x) - \omega^2 \left(\frac{\mu}{E \cdot I}\right) \cdot X(x) = 0 \qquad (12)$$

mit Eigenwert λ

$$\lambda^4 = \omega^2 \left(\frac{\mu}{E \cdot I}\right) \cdot L^4 \qquad (13.1)$$

$$X^{IV}(x) - \frac{\lambda^4}{L^4} \cdot X(x) = 0 \qquad (13.2)$$

Lösung der Ortsfunktionsgl. (13.2) ist die Transversal-Schwingung

$$X(x) = C_1 \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + C_3 \cdot \cosh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + C_4 \cdot \sinh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) \qquad (14)$$

aufgrund des Kontinuums enthält die Lösung der Ortsfunktion der Transversal-Schwingung die Zusatztherme

- Hyperbelkosinus, cosh(*a*x) und
- Hyperbelsinus, sinh(*a*x).

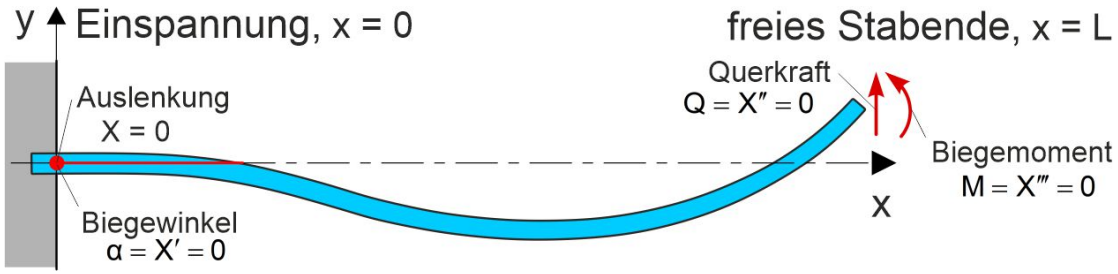
Stab, Lösung, Ortsfunktion, freie, transversale Schwingung, Eigenwerte

Transversal-Schwingung

$$X(x) = C_1 \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C_3 \cdot \cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C_4 \cdot \sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \quad (14)$$

Die Eigenwerte λ somit die Eigenfrequenzen ω werden aus den Randbedingungen des Stabes bestimmt!

Randbedingungen:
einseitige Einspannung.



eingesetzt in (14) mit $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0, \cosh(0) = 1, \sinh(0) = 0$

Einspannung, x = 0

→ Auslenkung = 0: $X(x = 0) = 0$ (15.1) ➡ $C_1 + C_3 = 0$ (16.1)

→ Biegewinkel = 0: $X'(x = 0) = 0$ (15.2) ➡ $C_2 + C_4 = 0$ (16.2)

freies Stabende, x = L

→ Querkraft $X''(x = L) = 0$ (15.3) ➡ $-C_1 \cdot (\cos(\lambda) + \cosh(\lambda)) - C_2 \cdot (\sin(\lambda) + \sinh(\lambda)) = 0$ (16.3)

→ Biegemoment = 0: $X'''(x = L) = 0$ (15.4) ➡ $C_1 \cdot (\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)) - C_2 \cdot (\cos(\lambda) + \cosh(\lambda)) = 0$ (16.4)

Stab, Lösung, Ortsfunktion, freie, transversale Schwingung, Eigenwerte

Die sich aus den Randbedingungen ergebenden Gl. (16.3) und (16.4) sind ein homogenes, lineares Gleichsystem:

$$\begin{vmatrix} \cos(\lambda)+\cosh(\lambda) & \sin(\lambda)+\sinh(\lambda) \\ -\sin(\lambda)+\sinh(\lambda) & \cos(\lambda)+\cosh(\lambda) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

→ Triviale Lösung wäre $C_1 = C_2 = 0$ bzw. $| C_1, C_2 | = 0$.

→ Nicht trivial ist das **Verschwinden der Determinante |..(λ)..| = 0, was auf die Eigenwerte λ führt:**

Eigenwertgleichung

$$\cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda) = -1 \qquad (18)$$

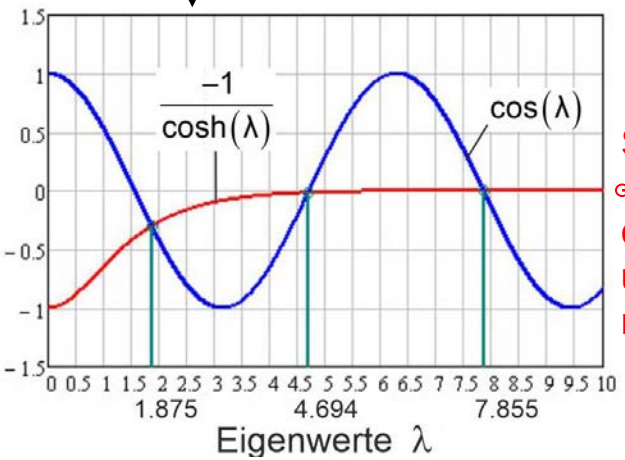
Wertebereich $-\infty < \cosh(\lambda) < +\infty$

hat unendlich viele, reelle Lösungen!

Eigenwertgleichung

Gleichung (19) ist die bevorzugte Form der Eigenwertgleichung (18),
weil dann der Wertebereich auf -1,+1 begrenzt bleibt:

$$\cos(\lambda) = \frac{-1}{\cosh(\lambda)} \qquad (19)$$



Schnittstellen → ergeben unendlich viele, reelle Lösungen!

Eigenwerte

an den Schnittstellen von cos(λ) mit cosh(λ):

$$\lambda_1 = 1.875 \qquad (20.1)$$

$$\lambda_2 = 4.694 \qquad (20.2) \quad 4.694 - 1.872 = 2.819$$

$$\lambda_3 = 7.855 \qquad (20.3) \quad 7.855 - 4.694 = 3.161$$

$$\vdots$$

$$(20.4) \quad \lambda_{j+1} - \lambda_j = \pi$$

mit (13.1) Eigenwert $\lambda^4 = \omega^2 \left(\frac{\mu}{E \cdot I} \right) \cdot L^4$ → **Eigenkreisfrequenzen**

$$\omega_j = \frac{\lambda_j^2}{L^2} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}} \qquad (21)$$

Das Kontinuum hat unendlich viele Eigenwerte λ und damit Eigenkreisfrequenzen ω!

Stab, Lösung, Ortsfunktion, freie, transversale Schwingung, Eigenfunktionen

Aus der Kenntnis der

1. **Eigenwerte λ_j** (20.j) und den
2. **Einspannbedingungen** (eingespannt – frei) mit **$C_{1,j}$, $C_{2,j}$, $C_{3,j}$, $C_{4,j}$** in der Stab-Ortsfunktion X(x) (14)
   ergeben sich mit daraus die

Eigenfunktionen $X_j(x)$ bzw. Eigenschwingungsformen

$$X_j(x) = \cos\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) - \frac{\sinh(\lambda_j) - \sin(\lambda_j)}{\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)} \cdot \left(\sin\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right)\right) \qquad (23)$$

Die Eigenfunktionen des Kontinuums entsprechen den Eigenvektoren diskreter Systeme
wie beispielsweise in der Modalanalyse.

Stab, Lösung, Ortsfunktion, freie, transversale Schwingung, Eigenformen

Eigenfunktionen

$$X_j(x) = \cos\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) - \frac{\sinh(\lambda_j) - \sin(\lambda_j)}{\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)} \cdot \left(\sin\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right)\right) \qquad (24)$$

Eigenschwingungsformen $X_j(x)$ des einseitig eingespannten Stabes

ergeben sich nach

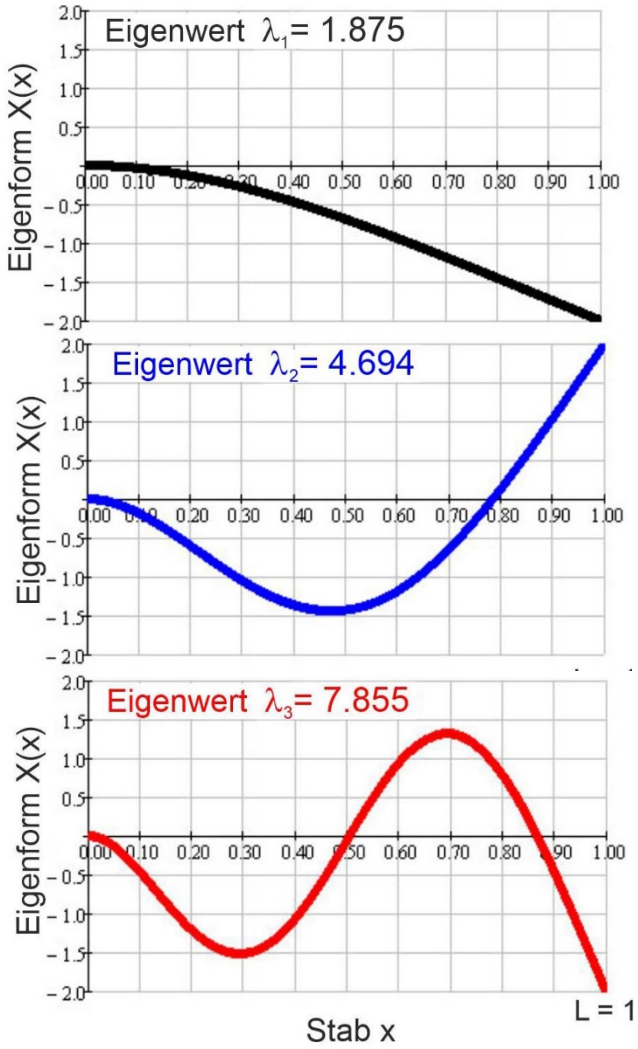
$\lambda_1 = 1.875$

$\lambda_2 = 4.694$

$\lambda_3 = 7.855$

→ Einsetzen der Eigenwerte λ_j in die Eigenfunktion,

→ Berechnen von $X_j(x)$ im Bereich x = 0 … L.



Bemerkung:
- Die Stablänge wurde auf L = 1 normiert.
- Nach Eingabe der Stabparameter können die Eigenkreisfrequenzen mittels (13) und die Eigenformen gemäß (23) auch dimensionsbehaftet berechnet werden.

Stab, Lösung, Zeitfunktion, freie, transversale Schwingung

Zeitfunktion T(t), Differentialgleichung

gemäß (10)

$$\ddot{T}(t) + \left(\frac{D_a}{\mu} + \omega_j^2 \cdot D_i \right) \cdot \dot{T}(t) + \omega_j^2 \cdot T(t) = 0 \qquad (25)$$

Zeitfunktion T(t), Lösung

$$T_j(t) = e^{-D_j t} \cdot \left(A_j \cdot \cos\left(\omega_{D,j} \cdot t \right) - B_j \cdot \sin\left(\omega_{D,j} \cdot t \right) \right) \qquad (26)$$

Abklingkonstante

$$D_j = \frac{1}{2} \left(\frac{D_a}{\mu} + \omega_j^2 \cdot D_i \right) \qquad (27)$$

Eigenfrequenz, gedämpft

$$\omega_{D,j} = \omega_j \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{D_a}{\mu} + \omega_j^2 \cdot D_i \right)^2}{4 \cdot \omega_j^2}} \qquad (28)$$

Wegen der geringen Dämpfungen D_a und D_i – ca. 0.005 … 0.05 – ist

$$\omega_{D,j} \approx \omega_j \qquad (29)$$

Die Größe der Ortsfunktion X(x) ist hingegen unabhängig von der Dämpfung, siehe (11).

Bedeutung der Eigenfunktionen $X_j(x)$ in der Modalanalyse:

Die allgemeine Schwingung y(x) ist die Summe der Eigenschwingungen $\sum X_j(x)$!

Die Eigenschwingungen $X_j(x)$ sind orthogonal, was bedeutet**:**

$$\int_{x=0}^{L} X_j(x) \cdot X_k(x) \cdot dx = \begin{cases} \int_0^L X_j^2(x) \cdot dx & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

das Produkt gleicher Eigenformen integriert sich zum Quadrat,

das Produkt verschiedener Eigenformen integriert sich zu 0.

(30)

daraus folgt:

→ die Stabschwingungen y(x,t) können nach Eigenfunktionen $X_j(x) \cdot T_j(t)$ hin aufgetrennt werden!

→ **Allgemeine Lösung ist dann die Summe $\sum$ der Eigenformen $X_j(x)$ inklusive deren Zeitfunktionen $T_j(t)$:**

$$y_{allg}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \cdot T_j(t)$$

(31)

→ Hinsichtlich der späteren Messung bedeutet dies:

In der Messung y(x,t) sind alle Eigenformen enthalten.

Stab, Lösung, erzwungene, transversale, gedämpfte Schwingung

gemäß (7.3)

erzwungen schwingender, gedämpfter Stab, Bewegungsgleichung

$$\mu \cdot \ddot{y} + (E \cdot I) \cdot y^{IV} + (E \cdot I) \cdot D_i \cdot y^{IV} \dot{y} + D_a \cdot \dot{y} = F(x,t) \qquad (32)$$

Massenkraft | Rückstellkraft | Material-dämpfungskraft | Äußere Dämpfungskraft | Erregerkräfte

Erregung, harmonisch $F(x,t) = F(x) \cdot e^{i\Omega t}$ (33)

Anwendung der Modalanalyse:

→ **Entwicklung der Störfunktion nach Eigenformen X_j**, möglich wegen der Orthogonalität gemäß (31)

$$F(x) \cdot e^{i\Omega t} = \sum_j F_j \cdot X_j \cdot e^{i\Omega t} \qquad (34)$$

→ **Lösung der Stabschwingung** (32) lässt sich **als Summe ∑ von Eigenformen** darstellen:

$$y_{allg}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \cdot T_j(t) \qquad \text{gemäß (31)}$$

→ Die **Amplituden des erzwungen, gedämpft schwingenden Stabes** lassen sich herleiten, in dem der j-ten Eigenform **eine unbekannte bzw. noch zu bestimmenden Amplitude $\underline{Y}_j$** hinzugefügt wird:

$$y(x,t) = \sum_j \underline{Y}_j \cdot X_j \cdot e^{i\Omega t} \qquad (35)$$

vergleichbar der inhomogenen Lösung eines SDOF-Systems.

Stab, Lösung, SDOF-System, Eigenformamplitude

Mit der Darstellung der Bewegung y(x,t) als Summe $\sum \underline{Y}_j \cdot X_j$ von Eigenformen (35)

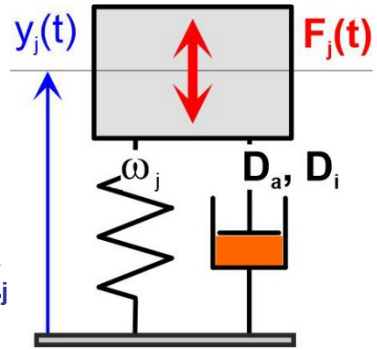
→ **jede Eigenform Y_j** kann darin als **fiktiver Ein-Freiheitsgrad-Schwinger (SDOF)$_j$** betrachtet werden.

Ausgehend von der Bewegungsgleichung (32) hat damit

das SDOF-System der j-ten Eigenform des erzwungen schwingenden Stabes als **Bewegungsdiffgl.**

$$\mu \cdot \ddot{y}_j + D_a \cdot \dot{y}_j + (E \cdot I) \cdot D_i \cdot y_j^{IV} \dot{y}_j + (E \cdot I) \cdot y_j^{IV} = F_j \cdot X_j \cdot e^{i\Omega t} \qquad (36)$$

Massenkraft | Rückstellkraft | Material-dämpfungskraft | Äußere Dämpfungskraft | Erregerkräfte



entsprechend (35) ist dann für die j-te Eigenform der

Lösungsansatz für das SDOF-System mit der unbekannten, komplexen Amplitude $\underline{Y}_j$

$$y_j(x,t) = \underline{Y}_j \cdot X_j \cdot e^{i\Omega t} \qquad (37.1)$$

mit dem Ansatz (37.1) ergeben sich für die Bewegungsgleichung (36) des SDOF-Schwingers die

erzwungenen Amplituden $\underline{Y}_j$ der j-ten Eigenform

$$\underline{Y}_j(\Omega) = \frac{1}{-\mu \cdot \Omega^2 + i\Omega \cdot \left(D_a + (E \cdot I) \cdot D_i \cdot \lambda_j^4\right) + (E \cdot I) \cdot \lambda_j^4} \cdot F_j \qquad (39)$$

gleichbedeutend als die Resonanzkurve für den Eigenwert λ_j bzw. der Eigenkreisfrequenz ω_j (13.1).

SDOF = Single Degree of Freedom = Ein-Freiheitsgrad(-Schwinger)

Stab, Lösung, SDOF-System, Übertragungsfunktion

in (39) $$\underline{Y}_j(\Omega) = \frac{1}{-\mu\cdot\Omega^2 + i\Omega\cdot\left(D_a + (E\cdot I)\cdot D_i\cdot\lambda_j^4\right) + (E\cdot I)\cdot\lambda_j^4}\cdot F_j$$

wird anstelle des Eigenwerts λ_j die Eigenkreisfrequenz ω_j gemäß (13.1) $\lambda_j^4 = \omega_j^2\left(\frac{\mu}{E\cdot I}\right)$ übernommen folgt daraus:

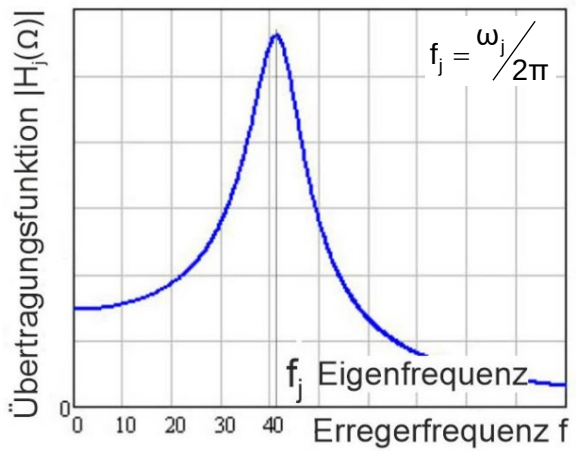
Eigenformamplitude $\underline{Y}_j(\Omega)$ der erzwungenen, gedämpften Schwingung

$$\underline{Y}_j(\Omega) = \frac{F_j}{\mu\cdot\omega_j^2}\cdot\frac{1}{\left[\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)^2\right) + i\Omega\cdot D_i + i\Omega\cdot\frac{D_a}{\mu\cdot\omega_j^2}\right]} \qquad (40)$$

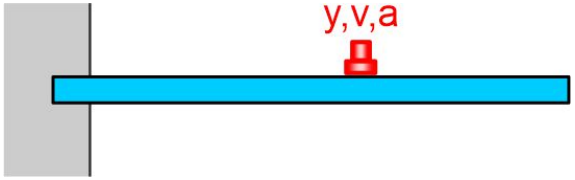
Darin ist

$\underline{H}_j(\Omega)$ die Übertragungsfunktion der j-ten Eigenform

$$\underline{H}_j(\Omega) = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)^2\right) + i\Omega\cdot\left(D_i + \frac{D_a}{\mu\cdot\omega_j^2}\right)} \qquad (41)$$



Stab, Messung der erzwungenen Schwingung



Die Schwingungsmessung erfasst nicht einzelne Eigenformen $y_j(x,t)$, sondern gemäß (31)
das Gesamtsignal $y(x,t)$, also die Summe $\sum y_j(x,t)$ über alle Eigenformen.

Bei der **erzwungenen, gedämpften Schwingung** ausgehend vom Schwingweg (35) mit (34) ist

→ **Schwingweg** (Biegelinie)

$$y(x,t) = \sum_j \underline{Y}_j(\Omega) \cdot X_j(x) \cdot e^{i\Omega t} = \sum_j \underline{H}_j(\Omega) \cdot F_j \cdot X_j(x) \cdot e^{i\Omega t} \qquad (42.1)$$

aus (42.1) mittels einmaliger Differentiation

→ **Schwinggeschwindigkeit**

$$v(x,t) = \dot{y}(x,t) = i\Omega \cdot \sum_j \underline{H}_j(\Omega) \cdot F_j \cdot X_j(x) \cdot e^{i\Omega t} \qquad (42.2)$$

aus (42.2) mittels einmaliger Differentiation

→ **Schwingbeschleunigung**

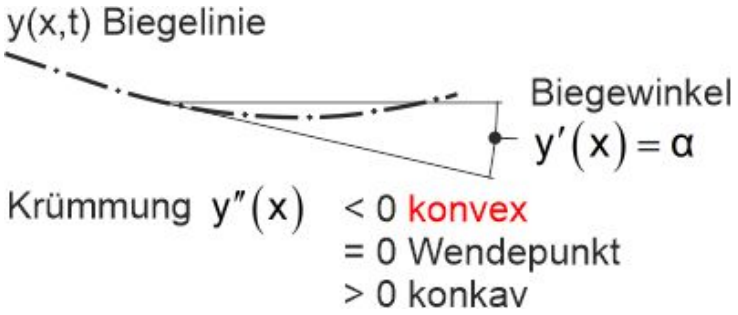
$$a(x,t) = \ddot{y}(x,t) = -\Omega^2 \cdot \sum_j \underline{H}_j(\Omega) \cdot F_j \cdot X_j(x) \cdot e^{i\Omega t} \qquad (42.3)$$

Stab, Krümmung

Leicht zu messen sind die vorherigen Schwinggrößen

- Weg y(x,t), (42.1)
- Geschwindigkeit v(x,t), (42.2)
- Beschleunigung a(x,t), (42.3)

Messtechnisch schwieriger ist
die für die Randspannung im Stab verantwortliche Krümmung der Biegelinie y(x,t).



→ **Krümmung** ergibt sich als
- 2. Ableitung y´´(x,t) der Biegelinie (42.1) und darin
- die Ortsfunktion X(x) (14):

$$y''(x,t) = \sum_j \underline{H}_j(\Omega) \cdot F_j \cdot \frac{\partial^2 X_j(x)}{\partial x^2} \cdot e^{i\Omega t} \qquad (43.2)$$

die zweimalige Ableitung der Ortsfunktion X(x) (14) ist

$$\frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} = \lambda_j^2 \cdot X_j''$$

wobei im Eigenwert λ die Eigenkreisfrequenz ω (13.1) enthalten ist

$$\lambda_j^2 = \omega_j \cdot \sqrt{\frac{\mu}{E \cdot I}} = \omega_j \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot q}{E \cdot I}}$$

sowie die Balkenparameter
E·I Biegesteifigkeit,
q Querschnittsfläche,
ρ Materialdichte.

sie ergeben $y''(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_j \underline{H}_j(\Omega) \cdot F_j \cdot X_j(x) \cdot e^{i\Omega t} = \sum_j \underline{H}_j(\Omega) \cdot F_j \cdot \lambda_j^2 \cdot X_j''(x) \cdot e^{i\Omega t}$

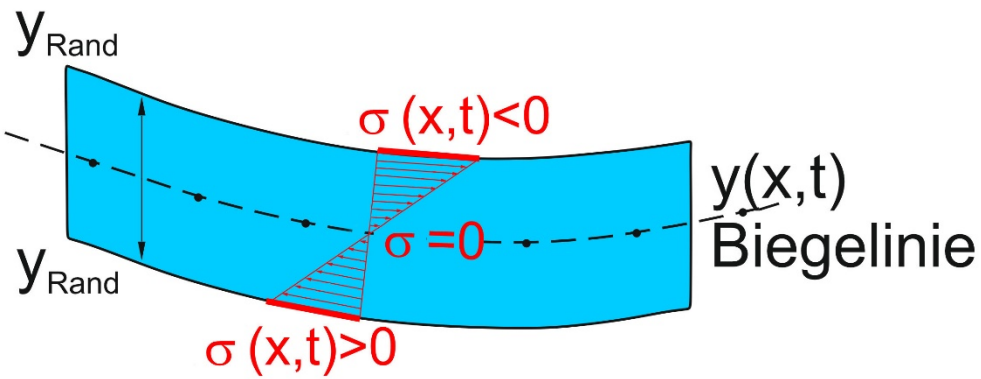
und führen auf die

Krümmung des Stabes

$$y''(x,t) = \sqrt{\frac{\rho \cdot q}{E \cdot I}} \cdot \sum_j \underline{H}_j(\Omega) \cdot F_j \cdot \omega_j \cdot X_j''(x) \cdot e^{i\Omega t} \qquad (43.3)$$

Stab, Randfaser-Spannungen

Spannungen σ(x,t) in der Randfaser y = y_{rand}



entstehen aus der Krümmung y´´(x,t) (43.3) und dem viskoelastischem Materialverhalten (7.3)

$$\sigma(x,t) = -y''(x,t)\cdot E\cdot y_{Rand}\left(1+i\cdot D_a\right) \tag{44.1}$$

(43.3) eingesetzt

$$\sigma(x,t) = \left(\sqrt{\frac{\rho\cdot q}{E\cdot I}}\cdot\sum_j \underline{H}_j(\Omega)\cdot F_j\cdot\omega_j\cdot X_j''(x)\cdot e^{i\Omega t}\right)\cdot\left(-\left(1+i\cdot D_a\right)\cdot E\cdot y_{Rand}\right) \tag{44.2}$$

Spannung σ(x,t) in der Randfaser y = y_{rand}

(44.2) ausmultipliziert und umgestellt

$$\sigma(x,t) = -\left(1+i\cdot D_a\right)\cdot\sqrt{E\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{q}{I}\cdot y_{Rand}^2}\cdot\sum_j \underline{H}_j(\Omega)\cdot\omega_j\cdot F_j\cdot X_j''(x)\cdot e^{i\Omega t} \tag{44.3}$$

Stab, Randfaser-Spannung, Vereinfachungen

Spannung σ(x,t) in der Randfaser y = y_{rand} nach (44.3)

$$\sigma(x,t) = -(1+i\cdot D_a)\cdot\sqrt{E\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{q}{I}\cdot y_{Rand}^2}\cdot\sum_j \underline{H}_j(\Omega)\cdot\omega_j\cdot F_j\cdot X_j''(x)\cdot e^{i\Omega t} \qquad (45)$$

1. Dominanz der Übertragungsfunktion $\underline{H}_j(\Omega)$ in Resonanznähe

Die Spannungshöhe σ(x,t) resultiert aus der Magnitude $|\underline{H}_j(\Omega)|$ (41) **in der Reihenentwicklung $\sum \underline{H}_j(\Omega)$… :**

$$\underline{H}_j(\Omega) = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)^2\right)+i\Omega\cdot\left(D_i+\frac{D_a}{\mu\cdot\omega_j^2}\right)} \to \infty \quad \Big| \begin{array}{l}\Omega\to\omega_j\\ D_i\to 0\\ D_a\to 0\end{array} \qquad (46.1)$$

Im Nenner wird – wegen der geringen Dämpfungen D_i, D_a – die Nähe der Anregungsfrequenz Ω zur Eigenfrequenz ω_j entscheidend:

$\Omega \approx \omega_j$ (resonanznah) → $(1-(\Omega/\omega_j)^2) \to 0$, also große Magnitude $|\underline{H}_j(\Omega)|$:
→ **die Spannung σ(x) ist in der Reihenentwicklung $\sum \underline{H}_j(\Omega)$… dominant.**

$\Omega \neq \omega_j$ (resonanzfern) → $(1-(\Omega/\omega_j)^2) \to \infty$, also kleine Magnitude $|\underline{H}_j(\Omega)|$:
→ **die Spannungen σ(x) sind nach $\underline{H}_j(\Omega)$** (46.1) **hingegen vernachlässigbar klein;**

→ **die Summation ∑ in** (45) **kann daher entfallen und σ(x,t) sich auf den Resonanzfall konzentrieren:**

$$\sigma(x,t) = -(1+i\cdot D_a)\cdot\sqrt{E\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{q}{I}\cdot y_{Rand}^2}\cdot\underline{H}_j(\Omega)\cdot\omega_j\cdot F_j\cdot X_j''(x)\cdot e^{i\Omega t}\Big|_{\Omega\approx\omega_j} \qquad (46.2)$$

Stab, Randfaser-Spannung, Vereinfachungen

2. Vernachlässigung des Multiplikators mit der äußeren Dämpfung D_a

$$\sigma(x,t) = -(1+i\cdot D_a)\cdot\sqrt{E\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{q}{I}\cdot y_{Rand}^2}\cdot\underline{H}_j(\Omega)\cdot\omega_j\cdot F_j\cdot X_j''(x)\cdot e^{i\Omega t}\Big|_{\Omega\approx\omega_j} \qquad (46.2)$$

Äußere Dämpfung D_a ist mit Werten im Bereich 0.005 … 0.05 vernachlässigbar, womit $1+i\cdot D_a \rightarrow 1$ in (46.2)

→ Vereinfachte Spannung σ(x,t) in der Randfaser $y = y_{rand}$

$$\sigma(x,t) = \sqrt{E\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{q}{I}\cdot y_{Rand}^2}\cdot\underline{H}_j(\Omega)\cdot\omega_j\cdot F_j\cdot X_j''(x)\cdot e^{i\Omega t}\Big|_{\Omega\approx\omega_j} \qquad (47)$$

Stab, Zusammenführen der Randfaserspannung σ und der Schwinggeschwindigkeit v

RECHNUNG

Berechnete Spannung σ(x,t) in der Randfaser

Vereinfachte Randfaserspannung σ(x,t) (47) umgestellt

$$\frac{\sigma(x,t)}{\sqrt{E\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{q}{I}\cdot y_{Rand}^2}\cdot X_j''(x)\cdot e^{i\Omega t}} = \underline{H}_j(\Omega)\cdot\omega_j\cdot F_j\Big|_{\Omega\approx\omega_j} \quad (48)$$

MESSUNG

Gemessene Schwinggeschwindigkeit v(x,t)
der erzwungenen Schwingung in der dominanten Eigenform

Messgleichung v(x,t) (42.2) umgestellt und um ω_j/ω_j erweitert

$$\underline{H}_j(\Omega)\cdot\omega_j\cdot F_j\Big|_{\Omega\approx\omega_j} = \frac{v(x,t)}{X_j(x)\cdot e^{i\Omega t}}\, i^{-1}\left(\frac{\omega_j}{\Omega}\right) \quad (49)$$

Ausgehend von übereinstimmenden $\underline{H}_j(\Omega)\cdot\omega_j\cdot F_j$

kann die Gleichung für σ(x,t) (48) mit der für v(x,t) (49) gleich gesetzt werden,

woraus sich die

Spannungs-Geschwindigkeits-Proportionalität

$$\sigma(x,t) = \sqrt{E\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{q}{I}\cdot y_{Rand}^2}\cdot i^{-1}\left(\frac{\omega_j}{\Omega}\right)\cdot\frac{X_j''(x)}{X_j(x)}\cdot v(x,t) \quad (50)$$

ergibt.

Stab, Bestandteile des Proportionalitätsfaktors K

Zwischen den größten Amplituden von Schwinggeschwindigkeit v und Spannung σ gilt daher die Beziehung

nach (50)

$$\hat{\sigma}_{max} = \sqrt{E \cdot \rho} \cdot \sqrt{\frac{q}{I} \cdot y_{Rand}^2} \cdot \frac{X''_{j,max}}{X_{j,max}} \cdot \left(\frac{\omega_j}{\Omega}\right) \cdot \hat{v}_{max} \qquad (51)$$

Wellen-widerstand | Profil-kennwert | Eigenform-kennwert | Frequenz-verhältnis

Proportionalitätsfaktor K

(1) Proportionalitätsfaktor K fasst

- **a) Profilkennwert** abhängig von Querschnitt q, Flächenträgheitsmoment I und Randfaserabstand $y_{rand,}$
- **b) Eigenformkennwert** abhängig von den Randbedingungen und der Ordnungszahl der Eigenform,
- **c) Frequenzverhältnis** ω_j/Ω ist in der Resonanz gleich 1,

zusammen, siehe GI (0.2) und (0.1).

(2) Wellenwiderstand ist mit $E \cdot \rho$ eine nur vom Material abhängige Konstante. Sie hat den größten Einfluss.

(3) Die Kenntnis der Erregerkraft F(x) ist nicht erforderlich. Denn in und nahe der Resonanz ist die Schwingform nicht von der Erregerverteilung abhängig.

→ **die gemessene, maximale Schwinggeschwindigkeit v_{max} führt auf die maximale Spannung σ_{max}.**

damit

$$\hat{\sigma}_{max} \sim \hat{v}_{max} \qquad (52)$$

Stab, Proportionalität von σ und v

Aus Gleichung (51) ergibt sich

die Proportionalität der mechanischen Spannung σ zur Schwinggeschwindigkeit v

wie in den anfänglichen Gleichungen (0.1) und (0.2) behauptet:

$$\sigma = \sqrt{E \cdot \rho} \cdot K \cdot v = K \cdot \rho \cdot c \cdot v \quad \frac{N}{m^2}$$

mit **K als Proportionalitätsfaktor** der mechanischen Spannung σ zur Schwinggeschwindigkeit v.

K ist dimensionslos und enthält die Kennwerte
- **des Profils,**
- **der Eigenform,**
- **des Frequenzverhältnisses**

(siehe Folie 34).

Dazu kommen
- E Elastizitätsmodul in N/m²
- ρ Materialdichte in kg/m³

→
- $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ Schallgeschwindigkeit im Material in m/s
- $\sqrt{E \cdot \rho}$ Wellenwiderstand in N·s/m³

quod **e**rat **d**emonstrandum
(was zu beweisen war)

Literatur

GabDVA Gaberson, H-A.: Conditions under which Displacement, Velocity, or Acceleration should be use for Diagnostic Monitoring. 234 Corsicana Drive, Oxnard, CA 93036, hagaberson@att.net.

GabSSE Gaberson, H. A.: Shock Severity Estimation. Sound and Vibration, January 2012.

GasDynB Gasch, R.: Eignung der Schwingmessung zur Ermittlung der dynamischen Beanspruchung in Bauteilen. Dissertation TU Berlin, 1968.

GasKno Gasch, R.; Knothe, G.: Strukturdynamik, Band 1, Diskrete Systeme; Band 2. Kontinua und Diskretisierung. Springer Verlag, Berlin ,Heidelberg, New York, 1987.

HenPieVel Henderson, George R. and Allan G. Piersol. “Fatigue damage related descriptor for random vibration test environments”, Sound and Vibration, October 1995. pg 21

KloEl1a Klotter, K.: Technische Schwingungslehre, 1. Band: Einfache Schwinger, 3. Auflage, Teil A: Lineare Schwinger. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

MagnPopp Magnus, K.; Popp, K.; Sextro, W.: Schwingungen. 2016, Springer, Vieweg.

SzaEin Szabo, Istvan: Einführung in die Technische Mechanik. 1963. Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg.

SzaHo Szabo, Istvan: Höhere Technische Mechanik. 1964. Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg.

TubMs01 Vorlesungsskript Mechanische Schwingungslehre I. TU Berlin, Institut für mechanische Schwingungslehre.

Hung F.V., “Stress and Strain Limits on the Attainable Velocity in Mechanical Vibration ”, J Acoust. Soc. Amer., 1960, v.32, n. 9, pp 1123-1 128, Sept.

Crandall, S. H., “Relation between Strain and Velocity in Resonant Vibration”, J. Acoust. Soc. Amer. , 1962, v. 34, n. 12, pp 1960-1961, Dec.